TENTAMEN AE1-801,SPACE ENGINEERING & TECHNOLOGY I

29 augustus 2006

DIT EXAMEN BEVAT 5 VRAAGSTUKKEN

LET OP:

ALLEEN DUIDELIJK GESCHREVEN UITWERKINGEN ZULLEN WORDEN NAGEKEKEN

Vraagstuk 1 (18 punten; 30 minuten)

Deze vraag (1) heeft betrekking op het deel *Space Missions & Systems* van het college *ae1-801*.

Een metalen paneel met een oppervlak A van 1m2 is bevestigd aan een satelliet. Het is perfect geisoleerd van warmtebronnen aan de achterkant, terwijl de voorkant op de zon gericht is en de koude ruimte ziet. De koude ruimte heeft een temperatuur T_{sp} van 2K. De "solar absorptance" α van het metaal 0.1 (10% van de energie van het zonlicht wordt geabsorbeerd), de infrarode emissie coefficient ε van het metaal is 0.04 (4% van de infrarode energie van het paneel wordt uitgestraald). Het paneel moet tussen de 250 and 400 K gehouden worden.

2a Bereken de door het paneel geabsorbeerde zonnestraling (in Watt) Q_{abs} aannemend, dat de zonneflux S gelijk is aan 1420 W/m^2.

2b Schrijf de formule voor de warmtebalans van het paneel op. Beinvloed de grootte van het oppervlak van het paneel de temperatuur, die het zal bereiken?

2c Bereken de temperatuur T_{pa} van het metalen paneel. De waarde van de Stefan-Boltzman constant σ is 56.7051x10-9 W/(m^{2}K^4). Ligt deze temperatuur in het toegestane temperatuursgebied?

2d Om de temperatuur te corrigeren beschikt u over twee verschillende oppervlakte behandelingen: zwarte verf en aan de achterzijde verzilverde glazen spiegeltjes (Second Surface Mirror). Optical eigenschappen van deze materialen zijn:

zwarte verf	$\alpha = 0.9$, $\varepsilon = 0.9$
verzilverde glazen spiegeltjes:	$\alpha = 0.1$, $\varepsilon = 0.9$

Welke oppervlaktebehandeling gebruikt u om het metalen paneel binnen de toegestane temperatuurgrenzen te houden? Welke temperatuur bereikt het paneel daarmee? Waarom gebruikt u niet de andere oppervlaktebehandeling (onderbouw uw antwoord met getallen)?

Vraagstuk 2 (7 punten; 15 minuten)

Deze vraag (2) heeft betrekking op het deel *Space Missions & Systems* van het college *ae1-801*.

Een robot arm van 10 m lengte moet een nuttige last van 6000 kg massa verplaatsen. De actuator aan de basis van de arm oefent een koppel van 300 Nm uit.

2a In hoeveel tijd heeft de robot arm de nuttige last over 180 graden verplaatst?

2b Om elektrisch vermogen te besparen bestaat de actuator uit een kleine motor met een reductie overbrenging (overbrengingsverhouding 1:400). Hoe groot is het motor koppel?

2c Wat is de maximale snelheid van de motor in omwentelingen per minuut?

Bij vraagstukken 3 en 4 mag, zonder afleiding, gebruik worden gemaakt van de volgende vergelijkingen:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = a(1-e\cos E) \tag{1}$$

$$M = E - e\sin E \tag{2}$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \tag{3}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \tag{4}$$

$$\Delta\omega = \frac{3}{2}\pi J_2 \left(\frac{R_e}{p}\right)^2 (5\cos^2 i - 1)\ (per\ omloop) \tag{5}$$

$$\Delta\Omega = -3\pi J_2 \left(\frac{R_e}{p}\right)^2 \cos i\ (per\ omloop) \tag{6}$$

Verder zijn de volgende parameters gegeven:

- Gemiddelde straal van de Aarde: $R_e = 6371$ km
- Gemiddelde straal van Neptunus: $R_{Neptunus} = 3.88\ R_e$
- Gravitatieparameter van de Aarde: $\mu_e = 398600$ km^3/s^2
- Gravitatieparameter van Neptunus: $\mu_{Neptunus} = 17.1\ \mu_e$
- Gravitatieparameter van de Zon: $\mu_{Sun} = 1.3271 \times 10^{11}$ km^3/s^2
- Afstand Aarde-Zon : $r_e = 1$ AU
- Afstand Neptunus-Zon: $r_{Neptunus} = 30.1$ AU
- 1 AU = 150×10^6 km
- Tweede zonaal harmonische coefficient: $J_2 = 1.082627 \times 10^{-3}$

Waardering:
- vraag 3: 25 punten
- vraag 4: 15 punten

Vraagstuk 3. Interplanetaire vlucht naar Neptunus

Beschouw een satellietmissie van de Aarde naar Neptunus. De interplanetaire vlucht vindt plaats d.m.v. een Hohmann overgangsbaan.

a. Wat is de verhouding tussen de gemiddelde massadichtheid van Neptunus en de Aarde?
b. Wat is de omlooptijd van de Aarde om de Zon? En die van Neptunus? (antwoord in jaren).
c. Waar bevindt zich het apocentrum van de overgaangsbaan? En waar het pericentrum?
d. Bereken de reistijd van de Aarde naar Neptunus.
e. Bereken de synodische periode voor het Neptunus-Aarde-Zon systeem.
f. Bereken de minimale wachttijd (ofwel de tijd dat de satelliet om Neptunus mag cirkelen) alvorens de satelliet terug kan reizen naar de aarde d.m.v. wederom een Hohmann overgansbaan. Wat is de minimale missieduur?

Vraagstuk 4. Stoorkrachten/bedekking

Stoorkrachten, d.w.z. krachten die afwijken van de centrale gravitatiekracht, zorgen ervoor dat de baan van een satelliet rond de aarde afwijkt van een perfecte kegelsnede. Deze stoorkrachten kunnen in sommige situaties ten voordele worden gebruikt.

De perigeumhoek van satellieten die vliegen in een baan met kritische inclinatie is constant.

a. Bereken de kritische inclinaties.

b. Leg uit hoe Rusland handig gebruikt maakt van deze kritische inclinatie voor haar *Molnya* communicatiesatellieten.

Een satelliet met een recht naar beneden kijkende hoogtemeter vliegt in een circelvormige satellietbaan met een inclinatie van 70 graden.

c. Bereken het percentage van het totale oppervlak van de Aarde waarover deze satelliet geen metingen kan doen. De Aarde wordt verondersteld bolvormig te zijn.

Vraagstuk 5 (35 punten)

Vraagstuk 5 is gerelateerd aan onderdeel *Rocket Motion* van de cursus *ae1-801*.

Na de succesvolle test van de nieuwe Vuurflits-3 raket (juni 2006) wordt een andere aanpak geprobeerd met de Vuurflits-4 (augustus 2006). Deze raket is bijna identiek aan de Vuurflits-3 en wederom gebaseerd op het concept van parallele trappen. De raket bestaat uit 3 identieke modules, die naast elkaar zijn gemonteerd. Bij de start worden alle motoren tegelijkertijd onstoken. Een dergelijke configuratie staat bekend als een 'anderhalftraps-raket'. Elke module van de Vuurflits-4 wordt aangedreven door een enkele (identieke) raketmotor. De voornaamste verschillen bij deze nieuwe aanpak zijn het stuwkrachtniveau van de 3 motoren en de stuwsoflading van de 3 modules. In tegenstelling met de vorige test, waren deze keer alle 3 de modules geheel volgetankt, maar bij de start was de stuwkracht van de motor van de centrale module gereduceerd tot 60 procent van de nominale waarde. Dit betekent dat deze module zijn stuwstoffen langzamer verbruikte dan de beide buitenste modules. Na uitbranden werden de beide buitenste modules afgeworpen, terwijl de stuwkracht van de motor van de centrale module werd opgevoerd tot 100 procent van de nominale waarde en bleef functioneren tot ook zijn stuwstoffen waren opgebruikt. Gedurende deze testvlucht functioneerde de raket wederom nominaal, en volgde een vertikaal traject. Een volgstation mat dat de centrale module een hoogte van 294 km boven zeeniveau had bereikt op het moment van uitbranden.

Je hebt de opdracht om de prestaties van deze nieuwe raket te evalueren:
1. Wat is de maximale snelheid geweest op het moment dat de centrale module uitdoofde?
2. Hoeveel seconden na de start van de raket (t_0) sloeg de centrale module in op de grond?

Dus, de Vuurflits-4 is een 'anderhalftraps-raket'. Om kosten te besparen zijn alle 3 de modules identiek wat betreft afmetingen, constructiemassa en motoren. Het enige verschil is dat de motor van de centrale module slechts op 60 procent van de nominale stuwkracht werkt tot uitbranden van beide buitenste modules. Elke module heeft een constructiemassa van 750 kg en een stuwstofmassa van 4250 kg. In tegenstelling met de vorige test werd deze keer een nuttige lading van 500 kg vervoerd!

De volgende ontwerpparameters zijn beschikbaar:

Nominale (!) stuwkracht van elke motor (3 in totaal)	F = 75 kN
Specifieke impuls van de motoren	I_{sp} = 300 s
Gravitatieversnelling	g_0 = 9.81 m/s2

Ter vereenvoudiging mag je aannemen dat de raket perfect vertikaal beweegt gedurende de gehele vlucht, en de vlucht plaatsvindt in een homogeen zwaartekrachtveld ($g = g_0$ = constant) in vacuüm.

a) Bereken de totale massa van de raket (2 punten)
b) Bereken de brandtijd van de buitenste modules tot hun stuwstoffen zijn opgebruikt (2 punten)
c) Bereken de <u>resterende</u> brandtijd van de centrale module tot leegbranden (2 punten)
d) Maak een lijst van alle noodzakelijke uitdrukkingen voor de opeenvolgende rekenstappen (N.B. 2) die nodig zijn om de snelheid te berekenen van de centrale module op het moment dat deze dooft. (6 punten)
e) Volg de rekenstappen die je onder d) hebt aangegeven en bereken de snelheid van de centrale module op het moment dat deze dooft. (13 punten)
f) Maak een lijst met alle opeenvolgende rekenstappen die nodig zijn om de totale duur van de testvlucht te berekenen vanaf het ontsteken van de motoren (t_0), tot het inslaan van de centrale module op de grond. (5 punten)
g) Volg de rekenstappen die je onder f) hebt aangegeven en bereken de totale duur van de testvlucht, gerekend vanaf het tijdstip van ontsteken van de motoren tot aan het moment van inslag van de centrale module. (5 punten). Als je de eindsnelheid onder vraag e) niet hebt kunnen berekenen, neem dan aan Ve_2 = 3909 m/s.

N.B. Afleidingen van formules, zoals de vergelijking van Tsiolkowski, zijn niet vereist maar kunnen wel behulpzaam zijn bij het vinden vande juiste uitdrukkingen.

EXAM AE1-801, SMS; SPACE ENGINEERING & TECHNOLOGY I
29 August 2006

THIS EXAMS CONSISTS OF 5 PROBLEMS.

PLEASE NOTE:
ONLY CLEARLY WRITTEN ANSWERS WILL BE GRADED

Problem 1 (18 points; 30 minutes)

This problem (1) is related to the part *Space Missions & Systems* of the course *ae1-801*.

A metal panel with an area *A* of 1m2 is attached to a spacecraft. It is perfectly isolated from heat sources at its back side, while its front side is looking to the Sun and to cold space. Cold space has a temperature T_{sp} of 2K. The solar absorptance α of the metal is 0.1 (10% of the energy of the sunlight is absorbed), the infrared emissivity ε of the metal is 0.04 (4% of the infrared energy of the panel is emitted). The panel must be kept between 250 and 400 K.

2a Calculate the solar radiation (in Watts) absorbed Q_{abs} by the metal panel, assuming a Solar flux *S* of 1420 W/m^2.

2b Write down the formula for the heat balance for the metal panel. Does the area of the metal panel influence the temperature the panel will reach?

2c Calculate the temperature T_{pa} of the metal panel. The value of the Stefan-Boltzman constant σ is 56.7051x10-9 W/(m^{2}K^4). Is this temperature in the range allowed?

2d To correct the temperature, you have two different surface finishes at your disposition: black paint and rear side metalized glass mirror (Second Surface Mirror). Optical properies of these materials are:

black paint	$\alpha = 0.9$, $\varepsilon = 0.9$
rear side metalized glass mirror:	$\alpha = 0.1$, $\varepsilon = 0.9$

Which surface finish will you use to keep the metal panel within its required temperature range? Which temperature does the panel reach? Why do you not use the other surface finish (motivate with numbers)?

Problem 2 (7 points; 15 minutes)

This problem (2) is related to the part *Space Missions & Systems* of the course *ae1-801*.

A robot arm of 10 m length has to move a payload of 6000 kg mass. The actuator at the root of the arm exercises 300 Nm torque.

2a How fast has the robot arm moved the payload over 180 degrees?

2b To save electrical power the actuator is a small motor with a reduction gearbox (gear ratio 1:400). What is the motor torque?

2c What is the maximum motor speed in revolutions per minute?

Problem 3. Mission to Neptune

Consider a satellite mission from the Earth to Neptune. The interplanetary flight from the Earth to Neptune is conducted by means of a Hohmann transfer orbit.

a. What is the average mass density ratio of Neptune compared to Earth?

b. Derive the orbital revolution periods (in years) of the Earth and Neptune around the Sun.

c. What is the apocenter location and what is the pericenter location of the Hohmann transfer orbit?

d. Compute the travel time from the Earth to Neptune.

e. Compute the synodic period for the Neptune-Earth-Sun constellation.

f. Compute the minimum lay-over time (or the time the satellite has to wait while circling around Neptune) in case the satellite has to travel back to the Earth by again a Hohmann transfer. What is the total minimum mission duration?

Problem 4. Perturbing forces/coverage

Perturbing forces, i.e. forces that deviate from the central gravity field term, cause a satellite's orbit around the Earth to deviate from a perfect Keplerian orbit. These perturbing forces can sometimes be advantageous for certain satellite orbits around the Earth.

The argument of perigee of satellites flying in an orbit with *critical inclination* is constant.

a. Compute the *critical inclinations*.

b. Explain how Russia used this *critical inclination* to her advantage when designing the *Molnya* orbits for telecommunication.

A satellite with a nadir looking altimeter is flying in a circular orbit with an inclination of 70 degrees.

c. Compute the percentage of the total surface of the Earth that can never be covered by the altimeter. The Earth is represented by a perfect sphere.

Problem 5 (35 points)

This problem (5) is related to the part *Rocket Motion* of the course *ae1-801*.

After the successful test of the new Fire Flash-3 rocket (June 2006) another approach is attempted with the Fire Flash-4 (August 2006). This rocket is almost identical to the Fire Flash-3 and based again on the concept of parallel stages. It consists of 3 identical modules, which are mounted side-by-side. At launch all engines are ignited simultaneously. Such a configuration is known as a 'one-and-a-half stage rocket'. Each module of the Fire Flash-4 is powered by a single (identical) rocket engine. The main differences in this new approach are the thrust level of the 3 engines and the propellant load of the 3 modules. In contrast with the previous test, this time all 3 modules were fully fuelled but at lift-off the thrust of the engine of the central module had been throttled down to 60 percent of its nominal value. This means that it used its propellants more slowly than the other 2 modules. At burnout, the 2 outer modules were jettisoned, while the engine of the central module was throttled back up to 100 percent of its nominal value and continued to function until its propellants were also depleted. During this mission, the rocket performed nominally again, flying a vertical trajectory. At the moment of burnout of the central module a tracking station measured an altitude of 294 km above sea level.

You have gotten the task to evaluate the performance of this new rocket:

1. What has been the maximum velocity of the central module at burnout?
2. How many seconds after lift-off (t_0) did the central module and the payload impact the ground?

So, the Fire Flash-4 is a 'one-and-a-half stage rocket'. To economize on costs, all 3 modules are identical in size, construction mass, and engines. The only difference is that the engine of the core module is working at only 60 percent of its nominal thrust level until burnout of the outer 2 modules. Each module has a construction mass of 750 kg and a propellant mass of 4250 kg. Also in contrast with the previous test, the rocket carried a payload of 500 kg.

The following design parameters are available:

<u>Nominal</u> (!) thrust of each engine (3 in total)	$F = 75$ kN
Specific impulse of the engines	$I_{sp} = 300$ s
Gravitational acceleration	$g_0 = 9.81$ m/s2

For simplicity, you may assume that the rocket moves perfectly vertical throughout the flight and the flight takes place in a homogeneous gravity field ($g = g_0$ = constant) in vacuum.

a. Compute the total mass of the rocket (2 pts)

b. Compute the burn time of the outer modules until their propellants are depleted (2 pts)

c. Compute the <u>remaining</u> burn time of the central module until burnout (2 pts)

d. List the necessary expression for the consecutive calculation steps (N.B. 2) that are necessary to compute the velocity of the central module at burnout (6 pts)

e. Follow the calculations steps you have listed under d) and compute the velocity of the central module at burnout. (13 pts)

f. List the consecutive calculation steps that are necessary to compute the total duration of the test flight after ignition of the engines (t_0) until the second stage crashes on the ground. (5 pts)

g. Follow the calculations steps you have listed under f) and calculate the total flight duration from the moment of ignition of the engines until the central module crashes on the ground. (5 pts).
If you did not succeed in calculating the velocity under question e), please assume Ve_2 = 3909 m/s.

N.B. Derivations of formulae like Tsiolkowski's equation are not requested, but may be helpful to find the correct expressions.

RESULTS (<u>not to be copied in the exam text</u>)

If an error is made in a formula: ***halve the points****. If an error is made in the calculus:* ***halve the points****. If one part of a question requiring more than one answer is erroneous:* ***reduce the points proportionally.***

RESULTS OF PROBLEM 1 (18 points)

1a 2 points

The absorbed heat is:

$$Q_{abs} = \alpha \cdot A \cdot S = 0.1 \cdot 1 \cdot 1420 = 142\,Watt$$

1b 2 points

Heat balance of rear side isolated panel:

$$\alpha \cdot A \cdot S = \varepsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot (T_{pa}{}^4 - T_{sp}{}^4)$$

The temperature T_{pa} is independent of the area A.

1c 5 points

$$\alpha \cdot S = 0.1 \cdot 1420 = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_{pa}{}^4 - T_{sp}{}^4) = 0.04 \cdot 56.7051 \cdot 10^{-9}(T_{pa}{}^4 - 2^4)$$

$$T_{pa}{}^4 - 16 = \frac{142}{0.04 \cdot 56.7051 \cdot 10^{-9}} = 6.26 \cdot 10^{10}\ K^4; \quad T_{pa} \approx 500.2\ K$$

500.2 K is greater than 400 K, the maximum temperature allowed.

1d 9 points

Rewriting equation 2c for $T_{pa} >> T_{sp}$:

$$T_{pa}{}^4 - T_{sp}{}^4 = T_{pa}{}^4 - 2^4 \approx T_{pa}{}^4 = \frac{\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{S}{\sigma} = \frac{\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{1420}{50.7051 \cdot 10^{-9}} = 2.5 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\alpha}{\varepsilon}$$

$$T_{pa} = \sqrt[4]{2.5 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\alpha}{\varepsilon}} = 398 \cdot \sqrt[4]{\alpha/\varepsilon}$$

For black paint $\alpha/\varepsilon = 1$: $T_{pa} = 398$ K, which is within the allowed temperature range.

For Second Surface Mirror $\alpha/\varepsilon = 0.1/0.9 = 0.111$: $T_{pa} = 0.577 * 398 = 230$ K, which is too cold.

PROBLEM 2

2a 3 points

Force and acceleration at the end of the arm:

$$F = \frac{Torque}{l} = \frac{300}{10} = 30N$$

$$a = \frac{F}{payload\ mass} = \frac{30}{6000} = 0.005\ m/s^2$$

A 90 degree arc with full torque acceleration or deceleration is covered in

$$t=\sqrt{(2\ s\ /\ a)} = \sqrt{(2\ l\ (\pi/2)\ /\ a)} = \sqrt{(10\ \pi/0.005)} = 79.3\ s$$

or 180 degrees is covered in less than 160 seconds.

2b 2 points

The reduction gearbox reduces the required motor torque to (300/400) = 0.75 Nm

2c 2 point

The arm tip velocity at the end of acceleration is

$V_{tip} = a\ t$ = 0.005 x 79.3 = 0.3965 m/s.

This corresponds to a joint rotation rate of

$\omega_{joint} = V/l$ = 0.3965 / 10 = 0.03965 rad/s

With the gearbox ratio of 400 this lead to a motor speed of

$\omega_{motor} = \omega_{joint}$ x 400 = 0.03965 x 400 = 15.86 rad/s = 15.86/2π = 2.52 rps =
= 2.52 x 60 = 151.5 rpm

Uitwerking vraagstuk 3:

- Totaal punten: 25
- Alleen punten toekennen indien antwoord exact goed is, tenzij anders aangegeven

a. 3 punten

$$\frac{\rho_{Neptune}}{\rho_{Earth}} = \frac{\mu_{Neptune}}{\mu_{Earth}} \times \frac{R^3_{Earth}}{R^3_{Neptune}} = 0.2928$$

b. 3 punten

$$Omlooptijd\ Aarde = P_e = 1\ jaar\ (1\ punt)$$
$$Omlooptijd\ Neptune = P_{Neptune} = \sqrt{r_{Neptune}{}^3} = \sqrt{39.44^3} = 165.139 jaar\ (2\ punten)$$

c. 3 punten

pericentrum = positie Aarde op vertrektijdstip (1.5 punten)
apocentrum = positie Neptune op aankomsttijdstip (1.5 punten)

d. 5 punten

$$T_h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(r_{Neptune} + r_e)^3}{2^3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+30.1)^3}{2^3}} = 30.66\ jaar$$

e. 5 punten

$$T_{syn} = \frac{1}{\left|\frac{1}{P_e} - \frac{1}{P_{Neptune}}\right|} = 1.0061\ jaar$$

e. 6 punten

Wachttijd $= T_w$

$$\begin{aligned}
\phi_{earth} &= (T_h + T_w + T_h)\omega_e = (2T_h + T_w)\omega_e \\
\phi_{sat} &= (\pi + T_w\omega_{Neptune} + \pi) = (2\pi + T_w\omega_{Neptune}) \\
\omega_e &= \frac{2\pi}{P_e}, \ \omega_{Neptune} = \frac{2\pi}{P_{Neptune}} \\
\phi_{sat} + k \times 2\pi &= \phi_{earth} \ (k = integer) \\
\frac{(2T_h + T_w)}{P_e} &= 1 + k + \frac{T_w}{P_{Neptune}} \\
\frac{2 \times 30.66 + T_w}{1} &= 1 + k + \frac{T_w}{165.13}
\end{aligned}$$

Thus $T_w = 0.6851$ jaar. (4 punten, alleen formule goed = 2 punten)

Minimale total missieduur = 62.0041 jaar (2 punten)

Uitwerking vraagstuk 4:

- Totaal punten: 15
- Alleen punten toekennen indien antwoord exact goed is, tenzij anders aangegeven

a. 5 punten

Pas formule (5) toe: $i = 63.43°$ or $i = 116.57°$

b. 5 punten

Gebruik wordt gemaakt van een hoog eccentrische ellipsbaan met het perigeum aan de andere kant van de aarde vanuit Rusland gezien. Door gebruik te maken van een kritische inclinatie, blijft het perigeum op deze lokatie en is de satelliet het grootste gedeelte van de tijd zichtbaar vanuit Rusland. Het apogeum bevindt zich dan nl. boven Rusland en de satelliet heeft daar de laagste snelheid.

c. 5 punten

$$\begin{aligned}
Spherical\ surface\ area\ 2\pi(1-\cos\alpha)R^2 & \ (1\ punt) \\
Total\ surface\ sphere &= 4\pi R^2\ (1\ punt) \\
\alpha &= 90° - inclination = 20°\ (1\ punt) \\
Missing\ area &= 2 \times 2\pi(1-\cos\alpha)R^2\ (note\ factor\ 2!!)\ (1\ punt)
\end{aligned}$$

Thus:

$$missing\ area = (1-\cos 20°) \times 100\% = 6\%\ (1\ punt)$$

5 a] $M_c = 3 \times 750 = 2250\ kg = 3\, M_{c1}$

$M_b = 3 \times 4250 = 12750\ kg = 3\, M_{b1}$

$M_u = 500\ kg$

$\boxed{M_{tot} = 15.500\ kg}$ (2p)

b] $F = I_{sp}\, g_0\, \dot{m} \rightarrow$

$$\dot{m} = \frac{F}{I_{sp} \times g_0} = \frac{75000}{300 \times 9.81} = 25.484\ kg/s \quad (1p)$$

$$\boxed{t_b = \frac{M_{b1}}{\dot{m}} = \frac{4250}{25.484} = 166.77\ sec} \quad (1p)$$

c] $60\% \rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} M_{b\,left} = 0.4\, M_{b1} \\ \text{Full throttle for the rest} \end{array}\right\} \rightarrow$ (1p)

$\boxed{t_{b\,left} = 0.4 \times t_b = 66.708\ sec}$ (1p)

d] 1st phase: M_{start1}, M_{end1}

$$V_1 = I_{sp}\, g_0 \ln \frac{M_{start1}}{M_{end1}} - g_0 t_b$$ gravity loss (3p)

2nd phase: M_{start2}, M_{end2}

$$V_2 = I_{sp}\, g_0 \ln \frac{M_{start2}}{M_{end2}} - g_0 t_{b\,left} \quad (2p)$$

$V_{end} = V_1 + V_2$ (1p)

e] $M_{start1} = 15.500$ kg (1p)

$M_{end1} = M_C + M_u + 0.4 M_{b1} =$

$= 2250 + 0.4 \times 4250 + 500 = 4450$ kg (1p)

$V_1 = 300 \times 9.81 \ln \frac{15.500}{4450} - 9.81 \times 166.77 =$

$= \boxed{2036,66 \text{ m/s}}$ (3p)

$M_{start2} = M_{c1} + 0.4 M_{b1} + M_u = 750 + 0.4 \times 4250 + 500 =$

$= 2950$ kg (1p)

$M_{end2} = M_{c1} + M_u = 750 + 500 = 1250$ kg (1p)

$V_2 = 300 \times 9.81 \ln \frac{2950}{1250} - 9.81 \times 66.708 =$

$= \boxed{1872,64 \text{ m/s}}$ (3p)

$\boxed{V_{end} = V_1 + V_2 = 3909.3 \text{ m/s}}$ (3p)

f] i] burn time : $t_{btot} = t_b + t_{b\,left}$ (1p)

ii] Coast time : $t_c = \frac{V_{end}}{g_0}$ (1p)

iii] culmination height : $h_c = h_b + \frac{1}{2} g_0 t_c^2$ (1p)

burn out height

iv] free fall : $t_f = \sqrt{\frac{2h_c}{g_0}}$ (1p)

v] Sum : $t_{tot} = t_{btot} + t_c + t_f$ (1p)

8] i] $t_{b\,tot} = 166.77 + 66.708 = 233.478$ sec 1p

ii] $t_c = \dfrac{3909.3}{9.81} = 398.50$ sec 1p

iii] $h_c = 294 \times 10^3 + \frac{1}{2} \times 9.81 \times 398.5^2 =$

$= 1072.925 \times 10^3$ m ($\cong 1073$ km) 1p

iv] ~~h~~ $t_f = \sqrt{\dfrac{2 \times 1072.925 \times 10^3}{9.81}} = 467.7$ sec 1p

v] $\boxed{t_{tot} = 1100 \text{ sec} = 18 \text{ min } 20 \text{ sec}}$ 1p

~~[illegible]~~

Rounding off permitted!