Examenvraagstukken College Vliegeigenschappen III (AE4-304), 22 Maart, 2002

Dit examen bevat 10 vraagstukken.

Bijgevoegd is een formuleblad.

1. Bereken van de stochastische variabele $\bar{x}$ met autocovariantiefunctie

   $$C_{\bar{x}\bar{x}}(\tau) = \frac{1}{2}\,cos(2\pi\tau)$$

   het autospectrum.

   Opmerking

   Stel

   $$cos(2\pi\tau) = \frac{e^{-j2\pi\tau} + e^{j2\pi\tau}}{2} \qquad \text{Z.O.Z.}$$

   en

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \delta(\omega)$$

2. Schets het vermogendichtheidsspectrum van de volgende signalen

   (a) $y_1(t) = sin(\omega_0\ t)$

   (b) $y_2(t) = cos(\omega_1\ t) + 1$

   (c) $y_3(t) = sin(\omega_1\ t) + 1$

   Verklaar uw antwoord.

3. Gegeven de exponentieel verdeelde stochastische variabele $\bar{x}$ met parameter λ ($\lambda > 0$)

$$\begin{cases} f_{\bar{x}}(x) & = & \lambda\ e^{-\lambda\, x} & (x > 0) \\ f_{\bar{x}}(x) & = & 0 & (x < 0) \end{cases}$$

   Bereken de verdelingsfunctie $F_{\bar{x}}(x)$, en bewijs dat de gemiddelde waarde $\mu_{\bar{x}}$ en de variantie $\sigma_{\bar{x}}^2$ gelijk is aan

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{1}{\lambda} \qquad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

4. Beschouw het stochastische proces $\bar{x}$ dat gedefinieerd is als de golfhoogte van een punt op het zeeoppervlak op een bepaalde plaats op de Noordzee. Op een bepaald tijdstip t_1 hoort hier een bepaalde verdelingsfunctie $f_{\bar{x}}(x;t_1)$ bij. Dit tijdstip valt in een periode met weinig wind. Op een tijdstip t_2, in een periode met veel wind, is de verdelingsfunctie gelijk aan $f_{\bar{x}}(x;t_2)$.

   (a) Schets voor beide tijdstippen de verdelingsfuncties $f_{\bar{x}}(x;t_1)$ en $f_{\bar{x}}(x;t_2)$ in één figuur. Opmerking: veronderstel dat $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{x}}(x;t)dx = 1$ voor alle t.

   (b) Wat voor soort stochastisch proces beschrijft $\bar{x}$?

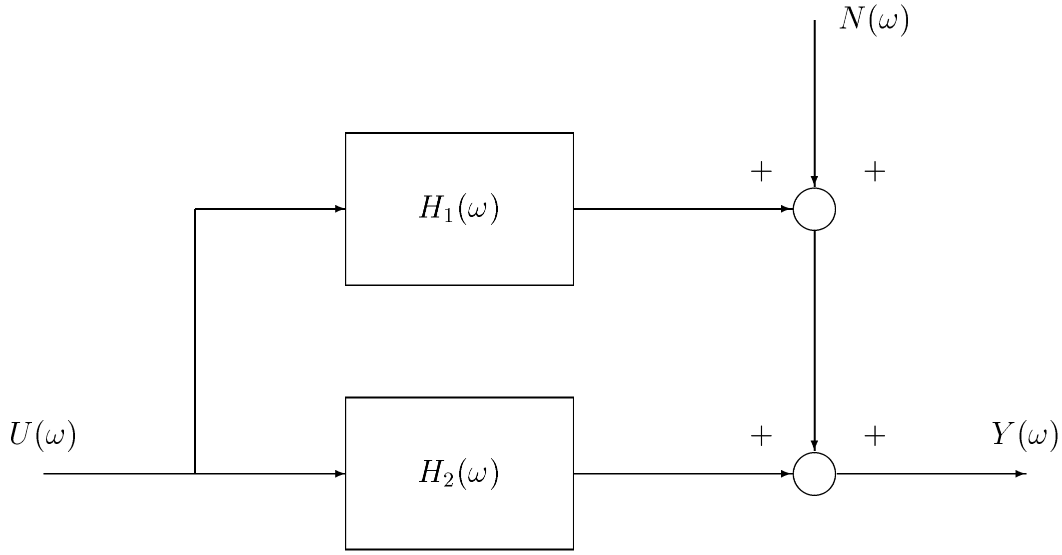
   Verklaar uw antwoord.

5. Welke van de volgende beweringen zijn waar

   (a) $R_{\bar{x}\bar{y}}(\tau) = R_{\bar{y}\bar{x}}(\tau)$
   (b) $C_{\bar{x}\bar{y}}(\tau) = C_{\bar{y}\bar{x}}(\tau)$
   (c) $K_{\bar{x}\bar{x}}(\tau) = K_{\bar{x}\bar{x}}(-\tau)$
   (d) $K_{\bar{x}\bar{x}}(0) = 1$
   (e) $S_{\bar{x}\bar{y}}(\omega) = S_{\bar{y}\bar{x}}(\omega)$
   (f) $S_{\bar{x}\bar{x}}(\omega) = S_{\bar{x}\bar{x}}(-\omega)$

   Verklaar uw antwoord.

6. Gegeven is onderstaand systeem waarvan de overdrachtfuncties $H_1(\omega)$ en $H_2(\omega)$ bekend zijn. De ingang $U(\omega)$ en de ruis op de uitgang $N(\omega)$ zijn stochastische signalen waarvan de vermogendichtheidsspectra eveneens bekend zijn. Beide signalen zijn witte ruis.



   (a) U wordt gevraagd het vermogendichtheidsspectrum van de uitgang $Y(\omega)$ te bepalen.

(b) Indien de vermogendichtheidsspectra van de ingang $U(\omega)$ en de ruis $N(\omega)$ niet bekend zijn en de signalen willekeurige stochastische processen zijn, dus niet noodzakelijkerwijs "witte ruis", is het dan nog steeds mogelijk het vermogendichtheidspectrum van de uitgang $Y(\omega)$ te bepalen? Verklaar uw antwoord.

7. Bewijs dat de discrete Fourier transormatie van een constante b gelijk is aan

$$DFT\{b\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} b \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = b \cdot \delta[k]$$

met $\delta[k]$ de Kronecker delta functie en gebruik bovenstaand resultaat om aan te tonen dat het periodogram $I_{\bar{y}\bar{y}}[k]$ van het signaal $y[n] = a\, x[n] + b$ gelijk is aan

$$I_{\bar{y}\bar{y}}[k] = a^2 I_{\bar{x}\bar{x}}[k] + (2a\; Re\{X[k]\} + b)\, b\; \delta[k]$$

met

$$I_{\bar{x}\bar{x}}[k] = X^*[k] \cdot X[k]$$

en waarbij $Re\{X[k]\}$ het reële deel van de Fourier getransformeerde van $x[n]$ is.

8. Voor een vliegtuig in de kruisvlucht is gegeven dat de gemiddelde waarde van de hoogte, h, 1000 meter is. Bovendien is gegeven dat de standaarddeviatie van de afwijking van deze hoogte gelijk is aan 12 meter in een turbulente atmosfeer. Bereken de kans dat de hoogteafwijking

(a) kleiner is dan 12 meter

(b) groter is dan 24 meter

Gegeven is dat de stochastische variabele h normaal verdeeld is. U maakt gebruik van de tabel voor de standaard-normale verdeling (gemiddelde waarde $\mu = 0$ en variantie $\sigma^2 = 1$) zoals gegeven in de bijlage.

9. Bewijs dat de Fourier transformatie van de Dirac functie δ gelijk is aan

$$F\{\delta(\tau)\} = 1$$

10. Bewijs de integraal van Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\ dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\ d\omega$$